МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних занять

з навчальної дисципліни

« ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ЧАСТИНА 1

(*для студентів 1 курсу денної форми навчання*

спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія)

Харків

ХНУМГ ім. О. М. Бекетова

2017

Методичні вказівки для практичних занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 1 (для студентів 1 курсу денної форми навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія.) / Харків. нац. ун-т. міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. П. Вороновська, С. С. Шульгіна. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 62 с.

Укладачі: **Л. П. Вороновська, С. С. Шульгіна**

Рецензент: Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 12 від 26.06.2015

ЗМІСТ

1 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1.1 Короткі теоретичні відомості

1. *Відстань d між точками $A(x_1, y_1)$* та $B(x_2, y_2)$ площини знаходять за формулою: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. Якщо x_1 і y_1 - координати точки A, а x_2 і y_2 - координати точки B, то координати x і y точки C, яка поділяє відрізок AB в даному відношенні $\lambda = \frac{AC}{CB}$, знаходять за формулами : $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

Якщо λ=1, то точка $C(x, y)$ *поділяє відрізок AB навпіл*, і тоді координати x і y середини відрізка AB знаходять за формулами: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

3. *Площу трикутника* за даними координатами вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ обчислюють за формулою:

$$S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|.$$

4. Рівняння прямої:

а) загальне рівняння прямої : $Ax + By + C = 0$, де A, B, C – деякі коефіцієнти;

б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$, де k – кутовий коефіцієнт, а b – довжина відрізку, який відсікає пряма на осі Oy.

в) рівняння прямої у відрізках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де a та b – довжини відрізків, які відсікає пряма відповідно на осях Ox та Oy.

г) рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з заданим кутовим коефіцієнтом k:

$$y - y_0 = k(x - x_0);$$

д) рівняння прямої , яка проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$ і *$B(x_2, y_2)$:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

5. *Кут між двома прямими.* Нехай дані дві прямі

$$y = k_1 x + b_1 \ \text{ і } \quad y = k_2 x + b_2$$

Кутом між двома прямими на площині називають кут θ (рис. 1) на який необхідно повернути пряму (1) проти ходу годинникової стрілки до збігу із прямою (2) і знаходять за формулою:

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

З цієї формули випливають дві умови:

а) умова *паралельності* прямих: $k_1 = k_2$;

б) умова *перпендикулярності* прямих : $k_1 = \frac{-1}{k_2}$.

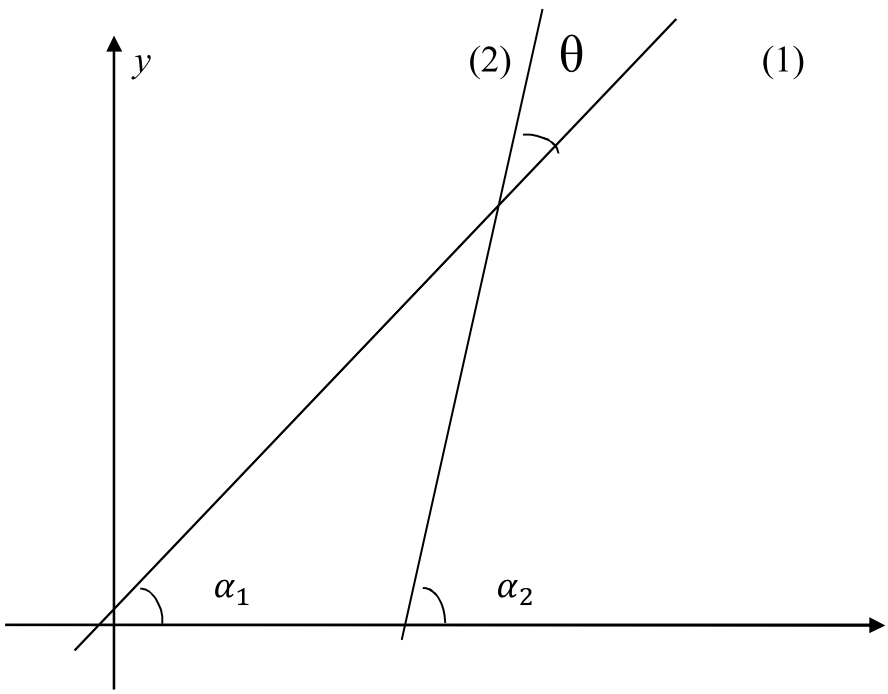


Рисунок 1

6. *Відстань від точки* $A(x_0, y_0)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$ знаходять за формулою:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

1.2 Розв'язання задач

Для трикутника (рис. 2) з вершинами $A(-2,-4)$, $B(-6,3)$, $C(5,1)$ розв'язати наступні задачі:

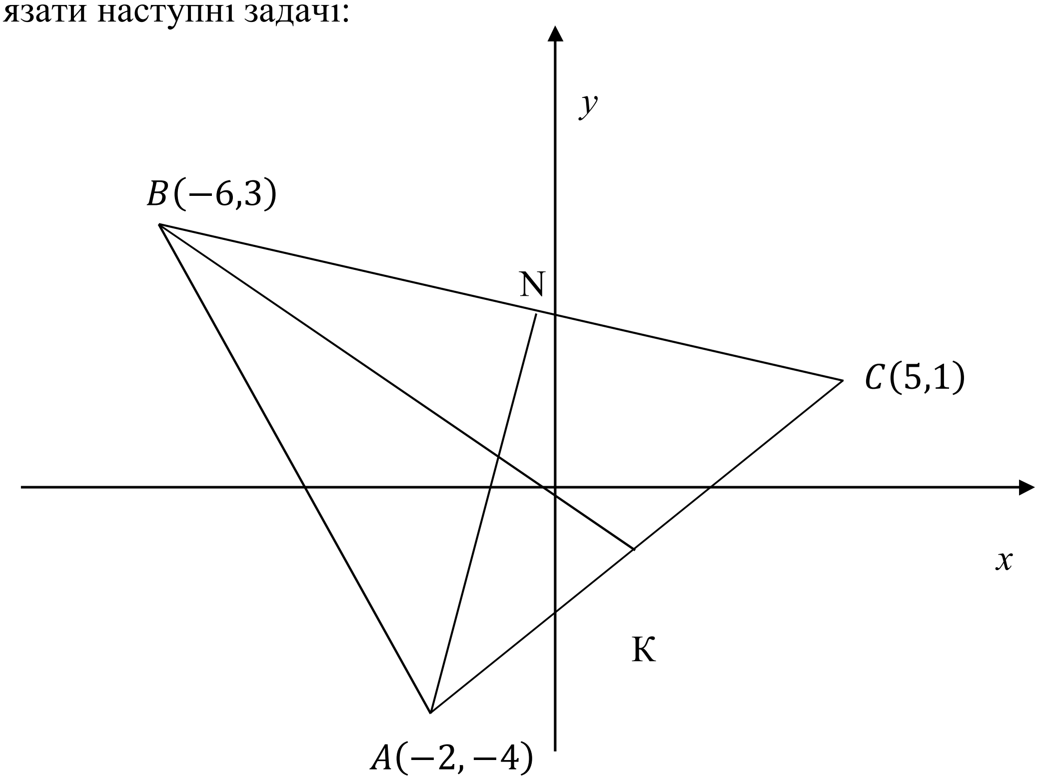


Рисунок 2

Приклад 1. Обчислити довжину сторін трикутника.

Розв'язання. За формулою : $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, знаходимо:

$d_{AB} = \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (3 - (-4))^2} = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (3 + 4)^2} = \sqrt{65}$ (од.)

$d_{BC} = \sqrt{(5 - (-6))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{(5 + 6)^2 + 4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ (од.)

$d_{AC} = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (1 - (-4))^2} = \sqrt{(5 + 2)^2 + (1 + 4)^2} = \sqrt{74}$ (од.)

Приклад 2. Визначити вид трикутника.

Розв'язання. Вид трикутника можна визначити за довжинами сторін: необхідно порівняти квадрат довжини найбільшої сторони з сумою квадратів довжин менших сторін.

Якщо $d_1^2 > d_2^2 + d_3^2$, то такий трикутник має тупий кут; якщо $d_1^2 = d_2^2 + d_3^2$, то це прямокутний трикутник і якщо $d_1^2 < d_2^2 + d_3^2$,то це - гострокутний трикутник. У цьому разі маємо:

$d_{BC}^2 < d_{AB}^2 + d_{AC}^2$; $125 < 65 + 74$; $125 < 139$.

Отже: трикутник гострокутний, різносторонній.

Приклад 3. Обчислити площу трикутника.

Розв'язання. Площа даного трикутника за наведеною вище формулою дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}|(-2-5)(3-1)-(-6-5)(-4-1)| = \frac{1}{2}|-14-55| = \left|\frac{-69}{2}\right|.$$

$$S = 34{,}5 \text{ (од. кв.)}$$

Приклад 4. Записати рівняння сторін трикутника.

Розв'язання. Рівняння сторони AB: $A(-2,-4), B(-6{,}3)$. За формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-(-2)}{-6-(-2)} = \frac{y-(-4)}{3-(-4)}$$

Після тотожних перетворень отримаємо:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}.$$

Рівняння сторін BC і AC знаходимо аналогічно:

BC: $B(-6{,}3)$, $C(5{,}1)$,

$$\frac{x-(-6)}{5-(-6)} = \frac{y-3}{1-3}. \quad \text{Звідси: } y = -\frac{2}{11}x + \frac{21}{11}.$$

AC: $A(-2,-4)$, $C(5{,}1)$,

$$\frac{x-(-2)}{5-(-2)} = \frac{y-(-4)}{1-(-4)}. \quad \text{Звідси } y = \frac{5}{7}x - \frac{18}{7}.$$

Приклад 5. Знайти внутрішні кути трикутника.

Розв'язання. Для виконання цього завдання скористаємося формулою

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут α утворено перетином прямих AB і AC (рис. 2). Отже, тут

$$k_1 = k_{AC} = \frac{5}{7}, \qquad k_2 = k_{AB} = -\frac{7}{4}. \text{ Маємо:}$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{7}{4} - \frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7}\cdot\frac{7}{4}} = \frac{-\frac{69}{28}}{-\frac{7}{28}} = \frac{69}{7}; \alpha = arctg\frac{69}{7}.$$

Кут β утворено перетином прямих AB і BC (рис. 2). Отже, тут

$$k_1 = k_{AB} = -\frac{7}{4}, \qquad k_2 = k_{BC} = -\frac{2}{11}. \text{ Маємо:}$$

$$tg\beta = \frac{-\frac{2}{11} + \frac{7}{4}}{1 + \frac{7}{4}\cdot\frac{2}{11}} = \frac{\frac{69}{44}}{\frac{58}{44}} = \frac{69}{58}; \ \beta = arctg\frac{69}{58}.$$

Кут γ утворено перетином прямих AC і BC (рис. 2). Отже, тут

$$k_1 = k_{BC} = -\frac{2}{11}, \qquad k_2 = k_{AC} = \frac{5}{7}.\ \text{Маємо:}$$

$$tg\gamma = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{\frac{69}{77}}{\frac{67}{77}} = \frac{69}{67};\ \ \gamma = arctg\frac{69}{67}.$$

Приклад 6. Знайти рівняння медіани BK.

Розв'язання. Медіана – це відрізок, який сполучає вершину трикутника з серединою його протилежної сторони. Координати точки K (рис. 2) знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Тут: $\mathrm{A}(-2, -4)$, $\mathrm{C}(5{,}1)$. Отже, маємо:

$$x_K = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y_K = \frac{-4 + 1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Рівняння BK запишемо за формулою:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тут: $B(-6{,}3), K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Отже $\quad \dfrac{x + 6}{\frac{3}{2} + 6} = \dfrac{y - 3}{-\frac{3}{2} - 3}$.

Після тотожних перетворень маємо рівняння медіани *BK:*

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}.$$

Приклад 7. Знайти рівняння висоти AN.

Розв'язання. Висота AN- це перпендикуляр, проведений з вершини A до сторони трикутника BC. Отже, для прямих BC і AN виконується умова перпендикулярності:

$$k_{AN} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{11}\right)} = \frac{11}{2}.$$

Рівняння висоти AN знаходимо за формулою: $y - y_0 = k(x - x_0)$, де $k = k_{AN}, A(x_0, y_0)$. Тобто: $k = \frac{11}{2}$, $A(-2, -4)$.

Маємо $y + 4 = \frac{11}{2}(x + 2)$; $y = \frac{11}{2}x + 11 - 4$.

Рівняння висоти AN: $y = \frac{11}{2}x + 7$.

Приклад 8. Обчислити довжину висоти CM.

Розв'язання. Довжину висоти CM знайдемо як відстань від точки $C(x_0, y_0)$ до прямої AB за формулою:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Для цього перепишемо рівняння прямої AB в загальному виді:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}; \quad 4y = -7x - 30; \ \ 7x + 4y + 30 = 0;$$

отже, $A = 7, B = 4, C = 30$. Точка $C(x_0, y_0)$ має координати $x_0 = 5, y_0$=1.

Отже: $d = \left|\frac{7 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 30}{\sqrt{7^2 + 4^2}}\right| = \frac{69}{\sqrt{65}}$ од. д.

Приклад 9. Знайти координати точки перетину медіани BK та висоти AN.

Розв'язання. Позначимо цю точку буквою P (рис. 2). Для знаходження її координат треба розв'язати систему рівнянь медіани BK та висоти AN:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} \\ y = \frac{11}{2}x + 7 \end{cases}; \text{ звідси маємо: } -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} = \frac{11}{2}x + 7.$$

Після тотожних перетворень отримаємо: $x = -\frac{76}{61}$.

Знайдене значення x підставимо у перше рівняння і отримаємо : $y = \frac{9}{61}$.

Отже, точка перетину медіани і висоти: $P\left(-\frac{76}{61}, \frac{9}{61}\right)$.

Приклад 10. Записати рівняння прямої, яка проходить через вершину трикутника B паралельно до його сторони AC.

Розв'язання. Позначимо рівняння шуканої прямої як BF. За умовою пряма BF паралельна прямій AC, а тому використавши умову паралельності двох прямих знайдемо кутовий коефіцієнт прямої BF:

$$k_{BF} = k_{AC} = \frac{5}{7}.$$

Для прямої BF відомі кутовий коефіцієнт та точка яка належить прямій, а отже використаємо наступне рівняння:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Тут $k = \frac{5}{7}$, $B(6{,}3)$. Маємо, $y - 3 = \frac{5}{7}(x + 6)$; $y = \frac{5}{7}x + \frac{30}{7} + 3$.

Рівняння прямої BF: $y = \frac{5}{7}x + \frac{51}{7}$.

Задачі для самоперевірки.

1. Дано ΔABC: $A(6;2), B(9;5), C(10;2)$. Знайти: а) рівняння медіани BD; б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони AC; в) площу ΔABC; г) $\angle BAC$.

2. Дано ΔABC: $A(-2;-2), B(1;-5), C(2;-2)$. Знайти:а) довжину висоти BD; б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони AB; в) площу ΔABC; г) $\angle ABC$.

2 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

2.1 Матриці. Визначники

Прямокутна таблиця чисел, яка складена з m рядків та n стовпців називається *матрицею* порядку $m \times n$. Матриця А має вигляд:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ або } \mathrm{A} = \left\| a_{ij} \right\|, \text{ або } \mathrm{A} = \langle a_{ij} \rangle, \text{ де } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Тут a_{ij} - елемент матриці А, який розташований в i-му рядку та j-му стовпці. Матриця називається квадратною, якщо $m = n$. Наприклад, матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}, m = n = 2 \text{ або } A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix}, m = n = 3.$$

Необхідно виділити деякі матриці: $E = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ \dots 0 \\ 0\ 1\ 0\ \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots 1 \end{pmatrix}$ - одинична;

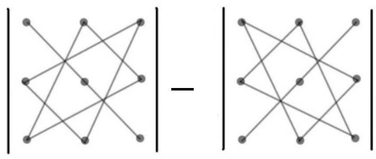
$D = \begin{pmatrix} a_{11}\ 0\ 0\ \dots 0 \\ 0\ a_{22}\ 0\ \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix}$ - діагональна та $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13}\ \dots\ a_{1n} \\ 0\ a_{22} a_{23}\ \dots\ a_{2n} \\ 0\ \ 0\ \ a_{33}\ \dots\ a_{3n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix}$ – верхньотрикутна.

Визначник - це число, яке знаходиться наступним чином:

1) для $A = (a), n = 1, detA = a$. Тут n - розмірність (порядок) $detA$,

2) для $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}, n = 2$: $detA = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

3) для $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix}, n = 3$, $detA = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$. Останній визначник обчислюємо за правилом «зірки». Правило «зірки» схематично виглядає так:

$detA =$  ,

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + +a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Приклад 1. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти $detA$.

Розв'язання. Скористаємося правилом "зірки"

$detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) - (1 \cdot 0 \cdot (-2) + \ \ +2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 5) = -3 - 8 - (18 - 10) = -19.$

Загальний метод обчислення визначників полягає у його розкладанні *за елементами рядка (або стовпця).*

Якщо візьмемо будь-який елемент визначника і викреслимо рядок і стовпець, в яких він розташований, то одержимо визначник меншого на одиницю порядку. Такий визначник називається *мінором*. Мінор помножений на $(-1)^{m+n}$, де m – номер рядка, а n – номер стовпця в яких знаходиться елемент, називається *алгебраїчним доповненням елемента*. Отже, визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчне доповнення.

Наприклад, якщо $A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$, то алгебраїчне доповнення для елемента a_{13} має такий вигляд: $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$, а для елемента a_{32}: $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{21} a_{23} \end{vmatrix}$.

Тоді формула розкладання визначника за елементами першого рядка представляється наступним чином: $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} +$ $+(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. Розкладання можна проводити як за елементами будь-якого рядка так і за елементами будь-якого стовпця.

Приклад 2. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ загальним методом.

Розв'язання. Для обчислення $detA$ для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ оберемо розкладання визначника за елементами другого стовпця:

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2}(-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-5+4) + 4(15+2) - 3(6+1) = -2 + 68 - 21 = 45.$$

Визначник третього порядку можна обчислити за будь-яким з розглянутих методів. Для обчислення визначників порядку $n \geq 4$ використовується лише метод розкладання за елементами рядка (або стовпця).

Властивості визначників:

1) Якщо визначник має нульовий рядок (стовпець) то $detA = 0$. Наприклад ,

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Якщо визначник має два пропорційні або однакові рядки (стовпця), то $detA = 0$.

$detA = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \end{vmatrix} = -24 - 24 - 16 + 24 + 24 + 16 = 0$, бо другий і третій рядок (перший і третій стовпець) пропорційні:

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8}.$$

3) Спільний множник якогось рядка (стовпця) можна винести за знак визначника: $detA = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4) Якщо переставити місцями два рядка (стовпця), то визначник змінить знак:

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5) Визначник не зміниться, якщо до будь-якого рядка (стовпця) додати інший рядок (стовпець) або рядок (стовпець), помножений на довільне число.

2.2 Дії над матрицями

Деякі види матриць ми розглянули у розділі 2.1. В цьому розділі ми розглянемо дії над матрицями.

Квадратна матриця називається невиродженою, якщо $detA \neq 0$ і навпаки, якщо $detA = 0$, матриця вироджена.

Сумою $A + B$ двох матриць $A = \langle a_{ij} \rangle$ і $B = \langle b_{ij} \rangle$, однакового розміру, називається матриця $C = \langle c_{ij} \rangle$, що має такий же розмір, а кожний елемент її дорівнює сумі відповідних елементів матриць A та B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} .$$

Добутком матриці A на число k називається матриця $C = \langle c_{ij} \rangle$, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число k:

$$c_{ij} = ka_{ij}.$$

Приклад 3. Обчислити $5A + B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Першим кроком при виконанні цієї задачі буде знаходження матриці $5A$:

$5A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 0 \\ 20 & 10 & -10 \\ 10 & 35 & 5 \end{pmatrix}$, а тепер виконаємо наступну дію:

$$5A+B=\begin{pmatrix}15 & -5 & 0\\ 20 & 10 & -10\\ 10 & 35 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -4 & 1\\ 18 & 14 & -5\\ 11 & 35 & 7\end{pmatrix}.$$

Добуток матриць. Добуток матриці A на матрицю B можна знайти тоді й тільки тоді, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Тобто, якщо матриця A має розмірність $m\times n$, а $B-\ n\times k$, то $C=AB-\ m\times k$.

Кожний елемент матриці C дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

Приклад 4. Знайти добуток двох матриць $A\cdot B$ і $B\cdot A$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку звернемо увагу на те, що обидві матриці квадратичні однакового розміру, а отже в такому випадку завжди можливо виконати дію множення.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot4+2\cdot3-1\cdot5 & 1\cdot1-2\cdot1-1\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot0-1\cdot2\\ 0\cdot4+4\cdot3+3\cdot5 & 0\cdot1-4\cdot1+3\cdot1 & 0\cdot2+4\cdot0+3\cdot2\\ 2\cdot4-1\cdot3-1\cdot5 & 2\cdot1+1\cdot1-1\cdot1 & 2\cdot2-1\cdot0-1\cdot2\end{pmatrix};$$

$$AB=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 27 & -1 & 6\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 4\cdot 2 + 1\cdot 4 - 2\cdot 1 & 4(-1) + 1\cdot 3 - 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 - 1\cdot 0 + 0\cdot 2 & 3\cdot 2 - 1\cdot 4 - 0\cdot 1 & 3(-1) - 1\cdot 3 - 0\cdot 1 \\ 5\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 5\cdot 2 + 1\cdot 4 - 2\cdot 1 & 5(-1) + 1\cdot 3 - 2\cdot 1 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 9 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи отримані результати можемо зробити висновок: $AB \neq BA$. В загальному випадку множення матриць не комутативне.

Приклад 5. Знайти $AB,$якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

Розв'язання. Звертаємо увагу, що число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці, а отже можемо виконати їх множення:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 - 1\cdot 3 \\ 0\cdot 3 + 4\cdot 1 - 2\cdot 1 & 0\cdot 0 + 4\cdot 2 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

А чи можна виконати дію BA? Відповідь – так. Бо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці (2 = 2).

Матриця, отримана з матриці А, заміною рядків стовпцями зі збереженням їхнього порядку, називається транспонованою стосовно матриці А й позначається A^T.

Приклад 6. Знайти транспоновану матрицю для матриці А.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Обернена матриця. Для розв'язання деяких задач нам необхідно вміти знаходити *обернену матрицю.* *Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці* А, якщо

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Квадратна матриця A має обернену матрицю A^{-1}, коли $detA \neq 0$ (необхідна і достатня умови).

Якщо $detA \neq 0$, то $A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}^T A_{12}^T \dots A_{1n}^T \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}^T A_{n2}^T \dots A_{nn}^T \end{pmatrix}$, де $\mathrm{A}_{ij}^{\mathrm{T}}$ - алгебраїчні доповнення до елементів транспонованої матриці.

Приклад 7. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1) обчислимо визначник матриці

$detA = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 + 10 - 1 - 12 + 20 = 27.$ Отже, $detA \neq 0$;

2) знайдемо транспоновану матрицю A^T. Для цього міняємо рядки на стовпці:
$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

3) знайдемо алгебраїчні доповнення до всіх елементів A^T:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2-1 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(20-2) = -18,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12-1 = 11,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10-1 = 9,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(6+1) = -7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3+5 = 8;$$

4) запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix};$$

5) виконаємо перевірку: $AA^{-1} = E$.

Отже, $AA^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0+30-3 & 0+6-6 & 0+12-12 \\ -54+55-1 & 18+11-2 & -18+22-4 \\ 27-35+8 & -9-7+16 & 9-14+32 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отриманий результат вказує на те, що обернена матриця знайдена вірно.

Відповідь: $A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

2.3 Правило Крамера для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Правило Крамера застосовується лише для таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь і $detA \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Правило Крамера має вигляд :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots \ \ldots \ \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ - це головний визначник системи, складений з коефіцієнтів при невідомих, а визначники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ одержуємо з головного визначника заміною i-го стовпця на стовпець вільних членів системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ і т.д.}$$

Якщо $\Delta = 0$, то система або несумісна (не має розв'язків), або має безліч розв'язків.

Приклад 8. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases}.$$

Розв'язання. $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & 5 & 1\\ 7 & -1 & -1\end{vmatrix}=-10-4-21-140+2-3=-176\neq 0,$

отже система має єдиний розв'язок .

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-5 & -3 & 4\\ 5 & 5 & 1\\ 7 & -1 & -1\end{vmatrix}=25-20-21-140-5-15=-176;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -5 & 4\\ 1 & 5 & 1\\ 7 & 7 & -1\end{vmatrix}=-10+28-35-140-14-5=-176;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & -5\\ 1 & 5 & 5\\ 7 & -1 & 7\end{vmatrix}=70+5-105+175+10+21=176\ ;$$

$$x_1=\frac{-176}{-176}=1,\ \ x_2=\frac{-176}{-176}=1,\qquad x_3=\frac{176}{-176}=-1.$$

Для перевірки підставляємо отримані значення невідомих в будь-яке рівняння системи.

Перевірка : $x_1+5x_2+x_3=5,$

$$-1+5(-1)+1=5.$$

Маємо $5=5.$ Тотожність істинна, тому робимо висновок, що розв'язок знайдено вірно.

Відповідь: $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=-1.$

Приклад 9. Чи можна розв'язати систему за правилом Крамера?

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+4x_3=-5\\ 4x_1-6x_2+8x_3=5\\ 7x_1-x_2-x_3=7\end{cases}.$$

Розв'язання. Головний визначник системи $\Delta=0$, тому правилом Крамера користуватись неможливо.

2.4 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими, яку подано на початку розділу 2.3. Цю систему запишемо у матричній формі: $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $detA \neq 0$, то матриця A має обернену. Помножимо обидві частини рівняння $AX = B$ на A^{-1} : $A^{-1}\,AX = A^{-1}B$, але $AA^{-1} = E$, тому $EX = A^{-1}B$. Враховуючи, що $EX = X$, маємо $X = A^{-1}B$.

Приклад 10. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання. Виконаємо наступне:

1) випишемо окремо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix};$$

2) обчислимо значення визначника матриці A:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 + 27 - 12 - 12 + 15 = 20;$$

3) транспонуємо матрицю A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

4) знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A^T:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(-15 + 8) = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 + 9) = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 - 4) = 10,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 9) = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5;$$

5) запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix};$$

6) знайдемо матрицю X: $X = A^{-1}B = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4 + 56 + 0 \\ 56 - 16 + 0 \\ 20 - 40 + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже ми отримали розв'язок системи: $x_1 = 3,\ \ x_2 = 2,\ x_3 = -1;$

7) зробимо перевірку отриманих результатів. Для цього підставимо знайдені значення в будь-яке рівняння системи:

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4$$

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 4(-1) = -4$$

$$-4 = -4\,.$$

Отримана тотожність істинна, а отже рішення знайдено вірно.

Відповідь: $x_1 = 3,\ \ x_2 = 2,\ x_3 = -1.$

2.5 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса

Для системи n лінійних рівнянь з n невідомими запишемо *розширену* матрицю : $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12}\ \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\ \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1}a_{n2}\ \dots a_{nn} & b_n \end{array}\right)$. За допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду верхньотрикутної матриці. Під елементарними перетвореннями мають на увазі множення рядків на деякі числа і додавання їх до інших рядків, перестановка рядків.

Метою перетворень є отримання іншої еквівалентної системи простішого вигляду.

Приклад 11. Розв'язати методом Гауса систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо головний визначник системи:

$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 8 + 8 - 2 - 8 = 6$, $detA \neq 0$, а отже система має рішення.

Запишемо розширену матрицю: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$.

Виконаємо наступні елементарні перетворення:

1) помножимо перший і другий рядки на такі числа, щоб отримати однакові перші елементи в рядках. В даному випадку помножимо перший рядок на 2 і з першого рядка віднімемо другий. Перший рядок переписуємо в тому ж вигляді, а результат елементарного перетворення записуємо у другий рядок: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$;

Ті самі дії виконуємо з першим та третім рядками. Перший рядок помножимо на 4 і віднімемо третій рядок. Результат перетворення запишемо у третій рядок. Перший і другий рядки переписуємо такими, як ми їх одержали у пункті 1): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \end{array}\right)$;

2) працюємо тепер з другим та третім рядками. Необхідно отримати однакові другі елементи в цих рядках. В даному випадку вони вже рівні, тому виконаємо дію віднімання (з другого рядка віднімемо третій, а результат запишемо в третій рядок): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$.

Отримали матрицю, у якої всі елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю.

3) за виглядом отриманої матриці записуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ \quad 3x_2 + 2x_3 = -11 \; ; \\ \qquad -2x_3 = 2 \end{cases}$$

4) третє рівняння системи має одне невідоме, тому почнемо роз'язання системи з цього рівняння: $-2x_3 = 2$, $x_3 = -1$; перейдемо до другого рівняння:$3x_2 + 2x_3 = -11$; підставимо в нього $x_3 = -1$ і отримаємо $x_2 = -3$; перейдемо до першого рівняння $x_1 + x_2 + 2x_3 = -4$; підставимо в нього $x_3 = -1$ та $x_2 = -3$ і отримаємо $x_1 = 1$.

5) перевірка: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$;

$$2 \cdot 1 — 3 + 2 \cdot (-1) = 3;$$

$$3 = 3.$$

Отримана тотожність істинна, рішення знайдено вірно.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

Задачі для самоперевірки

1. Розв'язати систему рівнянь: а) методом оберненої матриці; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему рівнянь: а) методом оберненої матриці; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} x + 5y - z = 3; \\ 2x + 4y - 3z = 2; \\ 3x - y - 3z = -7. \end{cases}$$

3. Розв'язати систему рівнянь: а) методом оберненої матриці; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8; \\ 2x - y - 3z = -4; \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

3 ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

3.1 Короткі теоретичні відомості

Число A називається *границею функції* $f(x)$ при x, яке прямує до x_0, якщо для будь-якого малого наперед заданого додатного числа ε можна знайти таке додатне δ, яке залежить від ε, що при всіх значеннях x, які входять до області визначення функції, відмінних від x_0 і виконуючих умову $|x - x_0| < \delta$, має місце нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Розглянемо необхідні теоретичні дані з теорії границь.

1. *Нескінченно малі і нескінченно великі функції:*

а) функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0;$$

б) функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

2. *Властивості нескінченно малих функцій:*

а) якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ нескінченно малі, то їх сума, різниця та добуток є нескінченно малою;

б) якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ нескінченно мала, а функція $\varphi(x)$ - обмежена, то їх добуток $f(x)\varphi(x)$ нескінченно мала.

3. *Властивості нескінченно великих функцій:*

Якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ має скінчену границю ($\lim_{x\to x_0} f(x) = b$), а функція $\varphi(x)$ - нескінченно велика ($\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$) , то:

а) сума їх - нескінченно велика, тобто $\lim_{x\to x_0}[f(x) + \varphi(x)] = \infty$, а границя відношення $f(x)$ до $\varphi(x)$ дорівнює нулю:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0;$$

б) якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$ $(b > 0)$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, при цьому $\varphi(x)$ додатна в околиці точки x_0 , то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$;

в) добуток двох нескінченно великих функцій є функція нескінченно велика, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ і $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то $\lim_{x\to x_0} f(x)\varphi(x) = \infty$.

4. *Зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими функціями:*

а) якщо $f(x)$ при $x \to x_0$ - нескінченно велика функція, то функція $\frac{1}{f(x)}$ нескінченно мала;

б) якщо при $x \to x_0$ функція $\varphi(x)$ нескінченно мала, то функція $\frac{1}{\varphi(x)}$ - нескінченно велика, при цьому вважаємо, що в околиці точки x_0 функція $\varphi(x)$ в нуль не обертається.

5. *Правила граничного переходу:*

а) якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають скінчені границі, то і їх алгебраїчна сума має границю , яка дорівнює сумі їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = b \pm c;$$

б) якщо при $x \to x_0$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі, то їх добуток також має границю, яка дорівнює добутку їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = bc\,;$$

в) якщо при $x \to x_0$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі і границя функції $\varphi(x)$ не дорівнює нулю, то границя їх відношення існує і дорівнює відношенню їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} = \frac{b}{c}.$$

3.2 Методи обчислення границь

3.2.1 Знаходження границь від дробово-раціональної функції

Для того щоб знайти границю від дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \to x_0$ чисельник і знаменник дробу мають границі, рівні нулю (маємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$), необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на $x - x_0$ і перейти до границі. Якщо і після цього чисельник і знаменник нового дробу мають границі рівні нулю при $x \to x_0$, то необхідно провести повторне ділення на $x - x_0$.

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 8} = \frac{4 - 2 + 2}{4 - 4 + 8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{3x^2 - 19x + 28} = \frac{16 - 4 - 12}{48 - 76 + 28} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

За правилом, наведеним вище, розділимо чисельник і знаменник на $x-4$.

$$x^2-x-12=(x-4)(x+3);$$

$$3x^2-19x+28=(x-4)(3x-7);$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(3x-7)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+3}{3x-7}=\frac{4+3}{12-7}=\frac{7}{5}.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+2x^3-3x^2-x+10}{x^3+6x^2+x-14}=\frac{16-16-12+2+10}{-8+24-2-14}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$x^4+2x^3-3x^2-x+10=(x+2)(x^3-3x+5)$$

$$x^3+6x^2+x-14=(x+2)(x^2+4x-7)$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^3-3x+5)}{(x+2)(x^2+4x-7)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x+5}{x^2+4x-7}=\frac{-8+6+5}{4-8-7}=-\frac{3}{11}.$$

Розглянемо декілька задач на знаходження границь дробово-раціональної функції при $x\to\infty$.

При $x\to\infty$ і чисельник, і знаменник дробу функції нескінченно великі. Отже, ми маємо справу з відношенням двох нескінченно великих функцій (маємо невизначеність $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$). В такому випадку необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на найвищу степінь x, яка зустрічається в членах дробу.

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+6x}{7x^3-4x+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

(найвища степінь x дорівнює 3, тому розділимо кожен елемент дробу на x^3)

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{7-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}} = \frac{2}{7}.$$

Тут $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=0$ (за властивостями нескінченно великих величин).

Приклад 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5+3x^2-2x+1}{6x^3-9x^2-7x+2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^5}{x^5}+\frac{3x^2}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}{\frac{6x^3}{x^5}-\frac{9x^2}{x^5}-\frac{7x}{x^5}+\frac{2}{x^5}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{\frac{6}{x^2}-\frac{9}{x^3}-\frac{7}{x^4}+\frac{2}{x^5}} = \frac{5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^5}} = \frac{5}{0} = \infty.$$

Приклад 6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3+3x^2-9}{4x^6-7x^5+2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8x^3}{x^6}+\frac{3x^2}{x^6}-\frac{9}{x^6}}{\frac{4x^6}{x^6}-\frac{7x^5}{x^6}+\frac{2x}{x^6}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{9}{x^6}}{4-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x^3}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^4}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{x^6}}{4-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^5}} = \frac{0}{4} = 0.$$

3.2.2 Знаходження границі від ірраціональної функції

Щоб знайти границю дробу, яка має ірраціональний вираз у випадку, коли і чисельник, і знаменник дробу дорівнює нулю (маємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$), необхідно помножити чисельник і знаменник на вираз спряжений до даного ірраціонального виразу.

Приклад 7.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}=\frac{\sqrt{3+6}-3}{9-9}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(спряженим до виразу $\sqrt{x+6}-3$ є $\sqrt{x+6}+3$, тому помножимо чисельник і знаменник на цей вираз)

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-9}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{12}.$$

Приклад 8.

$$\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(\sqrt{7-x}\right)^2-\left(\sqrt{11+x}\right)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{7-x-11-x}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{-4-2x}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{-2(2+x)}=-\frac{6}{2}=-3.$$

Приклад 9.

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(в цьому випадку ми маємо ірраціональні вирази і в чисельнику, і в знаменнику, тому необхідно помножити чисельник і знаменник на відповідні вирази їм спряжені)

$$= \lim_{x \to -3} \frac{\left(\sqrt{x^2+7} - \sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+7} + \sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x^2+7} + \sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{\left(\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2 - \left(\sqrt{7-3x}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-9}\right)^2\right)\left(\sqrt{x^2+7} + \sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x^2+7-7+3x)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}\right)}{(x+3-x^2+9)\left(\sqrt{x^2+7} + \sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x^2+3x)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}\right)}{-(x^2-x-12)\left(\sqrt{x^2+7} + \sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x(x+3)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}\right)}{-(x-4)(x+3)\left(\sqrt{x^2+7} + \sqrt{7-3x}\right)} = \frac{-3(0+0)}{7(4+4)} = 0.$$

3.2.3 Перша важлива границя

Перша важлива границя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1.$$

При знаходженні границь будемо використовувати наслідки з першої важливої границі:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$$

Приклад 10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - sinx}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx} - sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx - sinxcosx}{x^3 cosx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{x\cdot x^2 cosx} = \begin{bmatrix} 1 - cos2\alpha = 2sin^2\alpha \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2 cosx} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{x\cdot x\cdot cosx} = \left(\text{помножимо і чисельник і знаменник на}\frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot cosx} = \left[\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1; \lim_{x\to 0}cosx = 1\right] = \frac{1}{2}.$$

Приклад 11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{sin^2 3x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{sin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{sin^2x\cdot 9x^2}{sin^2 3x\cdot 9x^2} = \begin{bmatrix} \lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{9x^2}{sin^2 3x} = 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}.$$

Приклад 12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{sin3x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x\cdot 15x}{sin3x\cdot 15x} = \begin{bmatrix} \lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{5x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{sin3x} = 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{3}.$$

Приклад 13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos4x - cos2x}{x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-2sin\frac{4x+2x}{2}sin\frac{4x-2x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2sin3xsinx}{x^2} = -2\lim_{x\to 0}\frac{3sin3xsinx}{3x\cdot x} = -6.$$

3.2.4 Друга важлива границя

В цьому розділі ми розглянемо границі від показниково-степеневої функції $f(x)^{\varphi(x)}$, коли $f(x) \to 1$ і $\varphi(x) \to \infty$; тобто маємо невизначеність $|1^{\infty}|$. Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx} = |1^{\infty}| = e^{k} \quad \text{або} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{k}{x}} = |1^{\infty}| = e^{k}.$$

Число e – ірраціональне ($e \approx 2{,}718\ldots$), його називають експонентою. Коротко *exp*.

Приклад 14.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{5x-2} = \begin{bmatrix} \dfrac{3x-1}{4+3x} \to 1, \text{коли } x \to \infty \\ 5x-2 \to \infty, \text{коли } x \to \infty \end{bmatrix} = |1^{\infty}| =$$

(до основи показниково-степеневої функції додамо та віднімемо одиницю)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{4+3x}-1\right)^{5x-2} =$$

(приведемо до єдиного знаменника другий та третій елементи основи)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-4-3x}{4+3x}\right)^{5x-2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{5x-2} =$$

(помножимо степінь на дріб обернену до дробу, яку додаємо до одиниці у основі функції, а потім на таку ж, яку маємо)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{\frac{4+3x}{-5}\cdot\frac{(-5)}{4+3x}\cdot(5x-2)} = exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-5(5x-2)}{4+3x}\right)$$

$$= exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{10-25x}{4+3x}\right) = exp\left(-\frac{25}{3}\right)$$

Приклад 15.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x-3}\right)^{3x+2}=|1^{\infty}|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-1}{4x-3}-1\right)^{3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-1-4x+3}{4x-3}\right)^{3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{4x-3}\right)^{\frac{4x-3}{2}\cdot\frac{2}{4x-3}\cdot(3x+2)}=exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{4x-3}\right)=\sqrt{e^3}$$

Розглянемо випадок, коли у дужках знаходиться раціональний дріб максимальна степінь змінних чисельника і знаменника однакові, а коефіцієнти при них різні:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{kx}=\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}$$

У такому випадку є два рішення: 1) якщо $a>c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}=\infty$

2) якщо $a<c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}=0.$

Приклад 16.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-4}{9x+3}\right)^{x+2}=\left(\frac{7}{9}\right)^{\infty}=0.$$

Приклад 17.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{2x-6}\right)^{7x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\infty}=\infty.$$

Задачі для самоперевірки

1. Обчислити границі :

а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{5x^2-17x+6}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{3+x^2}-2}{3-\sqrt{8-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{5x+4}{5x-1}\right)^{3x+7}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-cos3x}{x^2}$.

2. Обчислити границі:

$$а)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5};\qquad б)\ \lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2+5x-6};$$

$$в)\ \lim_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{xtg2x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{6x-2}\right)^{2x-3}.$$

3. Обчислити границі :

$$а)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-7x+2};\qquad б)\ \lim_{x\to 1}\frac{5-\sqrt{x+24}}{x^2-5x+4};$$

$$в)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x+2}{7x+3}\right)^{3x-1};\qquad г)\ \lim_{x\to 0}\frac{cosx-cos7x}{x\cdot arcsinx}.$$

4 ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1 Похідна і диференціал функції

Поняття похідної є одним з основних математичних понять. Похідну широко використовують при розв'язанні інженерних, економічних та управлінських задач, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

Визначення. *Похідною функції* $y=f(x)$ в точці x_0 називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $f(x)$позначають одним із символів: $f'(x), y'(x),\ y', \frac{dy}{dx}$.

Отже, $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням.* Функція $\boldsymbol{y = f(x)}$, яка має похідну в кожній точці інтервалу $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$, називається *диференційованою в цьому інтервалі*.

Значення похідної функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точці $\boldsymbol{x = x_0}$ позначається $\boldsymbol{f'(x_0)}$ або $\boldsymbol{y'(x_0)}$.

Правила диференціювання

Нехай функції $u = u(x),\ v = v(x)$ – дві диференційовані в інтервалі (a, b) функції, тоді мають місце наступні правила:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; **2.** $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3. $\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$; **4.** $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

5. $\boldsymbol{\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c}} \cdot u'$; **6.** $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot lnu \cdot v'$.

Таблиця похідних

1. $(C)' = \mathbf{0}$; **2.**$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

2а. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; **2б.** $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$;

3. $(a^u)' = a^u \cdot ln\, a \cdot u'$; **3а.** $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4. $(log_a u)' = \frac{1}{u \cdot ln\, a} \cdot u'$; **4а.** $(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

5. $(sinu)' = cosu \cdot u'$; **6.** $(cosu)' = -sinu \cdot u'$

7. $(tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$; **8.** $(ctgu)' = \frac{-1}{sin^2 u} \cdot u'$;

9. $(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; **10.** $(arccosu)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; **12.** $(arcctgu)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$.

4.1.1 Приклади знаходження похідних

Знайти похідні від функцій:

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30$, б) $y = 3sin5x$,

в) $y = tg3x^2$, г) $y = arccos\sqrt{5x^4 - 3}$, д) $y = \sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4}$,

е) $y = cos2x^3 \cdot (5x - 2)^{12}$, ж) $y = arcctg^5 x \cdot log_5(x^2 + 2)$, з) $y = \frac{(4x+2)^2}{e^{sinx}}$.

Розв’язання.

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30$,

дана функція є сумою степеневих функцій і сталої величини. Похідні від степеневих функцій знаходимо за другою формулою в таблиці похідних, пам’ятаючи перше правило диференціювання, похідну сталої величини шукаємо за першою формулою в таблиці:

$$y' = (5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30)' =$$
$$= 40x^7 - 100x^{24} + 15x^4 - 60x^2 + 24x + 7.$$

б) $y = 3sin5x$,

за четвертим правилом диференціювання виносимо сталу за знак похідної, потім використовуємо п’яту формулу з таблиці похідних, де $u = 5x$

$$y' = (3sin5x\,)' = 3 \cdot (sin5x)' = 3 \cdot cos5x \cdot (5x)' = 3 \cdot cos5x \cdot 5 = 15cos5x;$$

в) $y = tg3x^2$, $y' = (tg3x^2\,)' = \frac{1}{cos^2 3x^2} \cdot (3x^2)' = \frac{1}{cos^2 3x^2} \cdot 6x = \frac{6x}{cos^2 3x^2}$;

у цьому випадку знаходили похідну, користуючись сьомою формулою таблиці похідних, де $u = 3x^2$;

г) $y = arccos\sqrt{5x^4 - 3}$,

використовуючи десяту формулу таблиці похідних, де $u = \sqrt{5x^4 - 3}$. В свою чергу $u = u(v)$, де $v = 5x^4 - 3$. Отже, знаходимо:

$$y' = \left(arccos\sqrt{5x^4 - 3}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{5x^4 - 3}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{5x^4 - 3}\right)' =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4 - 5x^4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^4 - 3}} \cdot (5x^4 - 3)' = \frac{-10x^3}{\sqrt{4 - 5x^4} \cdot \sqrt{5x^4 - 3}};$$

д) $y = \sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4}$.

Запишемо функцію в інший спосіб та використаємо другу формулу таблиці похідних:

$$y' = \left(\sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4}\right)' = \left((5x^4 - 3x^3 + 7)^{\frac{4}{5}}\right)' =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)^{-\frac{1}{5}} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)' =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)^{-\frac{1}{5}} \cdot (20x^3 - 9x^2) = \frac{80x^3 - 36x^2}{5\sqrt[5]{5x^4 - 3x^3 + 7}};$$

е) $y = cos2x^3 \cdot (5x - 2)^{12}$.

Спочатку розкладемо похідну за другим правилом диференціювання, потім використаємо формули з таблиці похідних:

$$y' = (cos2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + cos2x^3 \cdot ((5x - 2)^{12})' =$$

$$= -sin2x^3 \cdot (2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + cos2x^3 \cdot 12(5x - 2)^{11} \cdot (5x - 2)' =$$

$$= -6x^2 sin2x^3 \cdot (5x - 2)^{12} + 60cos2x^3 \cdot (5x - 2)^{11}.$$

ж) $y = arcctg^5 x \cdot log_5(x^2 + 2)$.

Знаходимо похідну , як у прикладі е) :

$$y' = (arcctg^5 x)' \cdot log_5(x^2 + 2) + arcctg^5 x \cdot \left(log_5(x^2 + 2)\right)' =$$

$$= 5arcctg^4x(arcctgx)'log_5(x^2+2) + arcctg^5x\frac{1}{(x^2+2)ln5}(x^2+2)' =$$

$$= \frac{-5arcctg^4x \cdot log_5(x^2+2)}{1+x^2} + \frac{2x \cdot arcctg^5x}{(x^2+5)ln5}.$$

з) $y = \frac{(4x+2)^2}{e^{sinx}}$.

У цьому прикладі спочатку використовуємо третє правило диференціювання, потім – формули з таблиці похідних:

$$y' = \frac{((4x+2)^2)' \cdot e^{sinx} - (4x+2)^2 \cdot \left(e^{sinx}\right)'}{(e^{sinx})^2} =$$

$$= \frac{2(4x+2)(4x+2)'e^{sinx} - (4x+2)^2e^{sinx}(sinx)'}{e^{2sinx}} =$$

$$= \frac{e^{sinx}(8(4x+2) - (4x+2)^2cosx)}{e^{2sinx}} = \frac{(4x+2)(8-(4x+2)cosx)}{e^{sinx}}.$$

4.1.2 Похідна функції, заданої у параметричній формі

Нехай функцію задано у параметричній формі:$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні і диференційовані, коли параметр $t\epsilon(\alpha;\beta)$. Нехай функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = t(x)$, яка також диференційована (це означає, що у деякій точці $t_0\epsilon(\alpha;\beta)$ похідна $x_t' \neq 0$), тоді має місце формула

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}. \qquad (*)$$

Приклад 1. Знайти y_x', якщо $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$.

Розв'язання. Знаходимо $x_t' = (1-t^2)' = -2t$ і $y_t' = (t-t^3)' =$

$= 1 - 3t^2$. Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули $(*)$, отримаємо:

$$y'_x = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = \frac{3t^2 - 1}{2t}.$$

Приклад 2. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$.

Розв'язання. Маємо

$$x'_t = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули $(*)$, дістанемо:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}.$$

Приклад 3. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = e^t cost \\ y = e^t sint \end{cases}$.

Розв'язання: Знаходимо x'_t і y'_t :

$$x'_t = e^t cost - e^t sint = e^t(cost - sint);$$

$$y'_t = e^t sint + e^t cost = e^t(sint + cost).$$

$$y'_x = \frac{sint + cost}{cost - sint}.$$

4.1.3 Похідна неявно заданої функції.

Якщо функція задана рівнянням $F(x, y) = 0$ (неявно), то для знаходження похідної від y по x необхідно продиференціювати рівняння по x , вважаючи, що y є функцією від x (тобто $(x)' = 1,\ (y)' = y'$); отримане рівняння слід розв'язати відносно y'.

Приклад 1. Знайти y'_x, якщо $y^2 - 3x^5 + 8x^2y^3 - 10 = 0$.

Розв'язання. Диференцюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x**:**

$$2yy' - 15x^4 + 16xy^3 + 24x^2y^2y' = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y':

$$2yy' + 24x^2y^2y' = 15x^4 - 16xy^3, \qquad y'(2y + 24x^2y^2) = 15x^4 - 16xy^3,$$

$$y' = \frac{15x^4 - 16xy^3}{2y + 24x^2y^2}.$$

Приклад 2. Знайти y'_x, якщо $sin2x + cos3y = sin^2y + 1$.

Розв'язання. Диференцюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x**:**

$$2cos2x - 3sin3y \cdot y' - 2siny \cdot cosy \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$y' \cdot (3sin3y + 2siny \cdot cosy) = 2cos2x,$$

$$y' = \frac{2cos2x}{3sin3y + 2siny \cdot cosy} = \frac{2cos2x}{3sin3y + sin2y}.$$

4.1.4 Логарифмічне диференціювання

а) Якщо функція $y = f(x)$ являє собою добуток більш ніж двох множників, то скористатися другим правилом незручно, тому перш ніж диференціювати її, можна прологарифмувати цю функцію.

Приклад. Знайти y', якщо $y = \sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2x \cdot \sqrt[4]{cosx}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

$$lny = ln\left(\sqrt[5]{sinx}\cdot arctg^2x\cdot\sqrt[4]{cosx}\right),$$

$$lny = \frac{1}{5}lnsinx + 2lnarctgx + \frac{1}{4}lncosx,$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності, пам’ятаючи, що $(x)' = 1,\ (y)' = y'$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5}\cdot\frac{cosx}{sinx} + \frac{2}{arctgx}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{-sinx}{cosx},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx\cdot(1+x^2)} - \frac{tgx}{4}.$$

Знайдемо шукану похідну. Для цього помножимо ліву та праву частину на y:

$$y' = y\cdot\left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx\cdot(1+x^2)} - \frac{tgx}{4}\right),$$

$$y' = \sqrt[5]{sinx}\cdot arctg^2x\cdot\sqrt[4]{cosx}\cdot\left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx\cdot(1+x^2)} - \frac{tgx}{4}\right).$$

б) Похідна показниково-степеневої функції.

Функція $y = (u(x))^{v(x)}$ називається *показниково-степеневою* функцією. Похідна від неї знаходиться за допомогою логарифмічного диференціювання.

Розглянемо приклади.

Приклад. Знайти y′, якщо $y = (x^2+1)^{sinx}$.

Розв’язання. Прологарифмуємо $lny = ln(x^2+1)^{sinx}$, скористаємося властивістю логарифмів $lny = sinx\cdot ln(x^2+1)$.

Диференціюємо обидві частини останнього рівняння:

$$\frac{y'}{y} = cosx\cdot ln(x^2+1) + sinx\cdot\frac{2x}{x^2+1}.$$

Знаходимо y': $$y' = y \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

На місце y записуємо вихідну функцію:

$$y' = (x^2+1)^{sinx} \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

Остаточно: $$y' = (x^2+1)^{sinx-1} \cdot \left[(x^2+1)cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + 2xsinx\right].$$

4.1.5 Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована у проміжку $(a; b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу x. Якщо функція $f'(x)$ диференційована у цьому ж проміжку, то її похідна називається *похідною другого порядку* і позначається $f''(x)$ (або y'', $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$). Таким чином, $y'' = (y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається *похідною третього порядку* і позначається $f'''(x)$ (або y''', $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$). Таким чином, $y''' = (y'')'$.

Похідною n – го порядку (або *n*-ю похідною, якщо вона існує) називається похідна від похідної $(n-1)$ порядку:

Таким чином, $$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Похідні, порядок яких вище першого, називають *похідними вищих порядків.*

Приклад 1. Знайти y''', якщо $y = 2e^{3x}$.

Розв’язання. $y' = 6 \cdot e^{3x}$; $y'' = (6 \cdot e^{3x})' = 18 \cdot e^{3x}$;

$$y''' = (18 \cdot e^{3x})' = 54 \cdot e^{3x}.$$

Приклад 2. Знайти y''' в точці $x_0 = 1$, якщо $y = 7x^5 - 3x^3 + 8x - 4$.

Розв’язання. $y' = 35x^4 - 9x^2 + 8$, $y'' = 140x^3 - 18x$, $y''' = 520x^2 - 18$, $y'''(1) = 520 - 18 = 502$.

Задачі для самоперевірки

1. Знайти похідні наступних функцій:

$a)\ y = (5x-2)^2(6x+1)^2$; б) $y = \frac{2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$; в) $y = (arcctgx)^{\log_2 7\, x}$;

г) $(e^x - 1)(e^y - 1) - 4y = 0$; д) $\begin{cases} x = 3cos^2 t \\ y = -2sin\dfrac{2}{t} - e^t \end{cases}$.

2. Знайти похідні наступних функцій:

$a)\ y = \dfrac{2x^4}{e^{3sinx}}$; б) $y = arccos\sqrt[3]{\dfrac{5}{x}}$; в) $y = (arcsin2x)^{ln3x}$;

г) $\left(e^{x^2} + 4x\right)(2e^y - 1) - 3y = 0$; д) $\begin{cases} x = 3\sqrt{cost} \\ y = 2\sqrt{sin\dfrac{2}{t}} - e^{3t} \end{cases}$.

3. Знайти похідні наступних функцій:

$a)\ y = \left(\dfrac{2x}{1-7x}\right)^2$; б) $y = ln(tg^3 2x)$; в) $y = (cos4x)^{arctg3x^5}$;

г) $2x^3 - y^2 = -arctg^2 y$; д) $\begin{cases} x = cos\dfrac{3}{t^2} \\ y = 3t - sin\dfrac{t^3}{\sqrt{5}} \end{cases}$.

4.1.6 Правило Лопіталя (розкриття невизначеностей виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ та $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$)

Теорема (Правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні і диференційовні в околі точки $x_0 = a$, тобто $0 < |x - a| < \varepsilon$, причому $\varphi'(x) \neq$

0, тоді якщо існує скінчена або нескінчена границя відношення похідних $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ при $x \to a$, то відношення функцій має границю, тобто:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| \text{ або } \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} .$$

Зауваження 1. Твердження теореми залишається в силі, якщо а $= \infty$, тобто: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження 2: існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Обернене твердження невірно, оскільки границя відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних.

Зауваження 3. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ будуть відповідати сформульованій теоремі, то можна брати границю відношень других похідних і т.д.. Тобто, правило Лопіталя можна застосовувати послідовно декілька разів.

Зауваження 4. Для інших невизначенностей треба виконати тотожні перетворення до розглянутих: $\left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, щоб застосувати правило Лопіталя.

Приклад 1. Знайти границі функцій

$$a)\ lim_{x\to 0}\frac{ln(1+3x)}{2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+3x}}{2} = \frac{3}{2};$$

$$б)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{5x}}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{5e^{5x}}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{25e^{5x}}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty;$$

(застосували правило Лопіталя двічі).

$$в)\ \lim_{x\to 0}(x^2\cdot lnx) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 0} = \frac{lnx}{1/_{x^2}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{1/_x}{-1/_{x^4}\cdot 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2} = 0;$$

Виконали тотожне перетворення $|0\cdot\infty|$ до $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$. Для цього замінили множення діленням на обернене.

$$г)\ \lim_{x\to 0}\frac{arctg4x}{8x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+16x^2}}{8}=\frac{1}{8};$$

$$д)\ \lim_{x\to 1}(lnx\cdot ln(x-1))=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{{}^1/_{lnx}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{{}^1/_{x-1}}{{}^{-1}/_{x\cdot(lnx)^2}}=$$

$$-\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(lnx)^2}{x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim_{x\to 1}\frac{(lnx)^2+\frac{2xlnx}{x}}{1}=0;$$

(Виконали тотожне перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

$$е)\ \lim_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\cdot lnx=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{{}^1/_{lnx}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{{}^{-2}/_{(1+x^2)}}{{}^{-1}/_{x(lnx)^2}}=$$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2x(lnx)^2}{1+x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2(lnx)^2+4lnx}{2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4lnx}{x}+\frac{4}{x}}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(lnx+1)}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=2\lim_{x\to\infty}\frac{{}^1/_x}{1}=\frac{1}{\infty}=0\ ;$$

(Виконали тотожне перетворення і застосували правило Лопіталя 4 рази)

$$ж)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=$$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\ ;$$

(Виконали тотожне перетворення, а саме, привели дроби до спільного знаменника і застосували правило Лопіталя двічі).

Приклад 2. Знайти границі функцій

$$а)\ \lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx}=|0^0|=A\ ,$$

функція є показниково-степеневою, тому позначимо границю функції через A, та прологарифмуємо її:

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = \lim_{x\to 0}ln(arcsinx)^{tgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}tgx \cdot lnarcsinx = \lim_{x\to 0}\frac{lnarcsinx}{ctgx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$$

Отримали границю відношення функцій, до якої можна застосувати правило Лопіталя. Після його застосування маємо:

$$lnA = \lim_{x\to 0}\frac{-sin^2x}{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsinx} = \left|\frac{0}{0}\right|$$

Знову застосовуємо правило Лопіталя:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2sinxcosx}{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot arcsinx + \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{sin2x\cdot\sqrt{1-x^2}}{x\cdot arcsinx - \sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{1}$$
$$= 0\,,$$

Отже, $lnA = 0$ і тоді $A = e^0 = 1$.

б) $$\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = |\infty^0| = A,$$

$$\ln A = ln\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}ln(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{lnx}\cdot lnctgx =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{lnctgx}{lnx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{sin^2x\cdot ctgx}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin^2x\cdot ctgx} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{x}}{sin^2x\cdot\frac{cosx}{sinx}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx\cdot cosx} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} = -1,$$

отримали $\ln A = -1$, тоді $A = e^{-1}$.

Задачі для самоперевірки

1. Зайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2 4x}{x^3+tg2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{tgx}$.

2. Зайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

$a)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{arcsin(x+1)}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\big(ln(x+1)\big)^{1/ln2x}$.

3. Зайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+sin4x}{cosx-e^x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(cos5x)^{1/x^2}$.

4.2 Дослідження функції за допомогою похідної

Визначимо загальні правила дослідження функції, які дозволять зробити ескіз графіка функції.

4.2.1 Зростання і спадання функції

Теорема. Для того, щоб диференційована на проміжку $(a;b)$ функція $f(x)$ зростала (спадала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб $f'(x)>0 (f'(x)<0)$ при будь – якому $x\in(a;b)$.

Приклад. Знайти проміжки зростання і спадання функції $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції: $x\neq 4$, тобто $D(y)=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$. Знайдемо похідну цієї функції:

$$y'=\frac{(2x-4)(x-4)-(x^2-4x+1)}{(x-4)^2}=\frac{2x^2-8x-4x+16-x^2+4x-1}{(x-4)^2}=$$

$$=\frac{x^2-8x+15}{(x-4)^2}=\frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2};$$

Для визначення проміжків зростання і спадання функції, визначимо знак похідної: $y' = 0$; $\frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2} = 0$. Звідси знаходимо корені похідної: $x = 5$ і $x = 3$. На рисунку 4 зображено інтервали зростання і спадання даної функції.

Знак y':

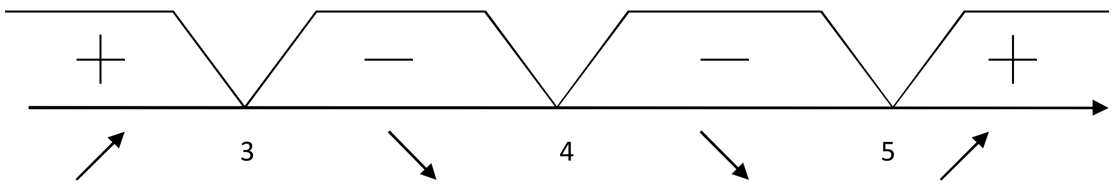


Рисунок 4

Зробимо висновок, що функція зростає, коли: $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$, функція спадає, коли: $x \in (3; 4) \cup (4; 5)$.

4.2.2 Максимум і мінімум функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і деякому її околі. Точка x_0 називається *точкою максимуму (мінімуму) функції* $f(x)$, якщо значення функції у точці x_0 більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки x_0: $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ $\big($або $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)\big)$, коли $\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$.

Максимум і мінімум функції називають *екстремумами* або *екстремальними значеннями функції.*

Теорема (необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційована функція $f(x)$ має у точці x_0 максимум або мінімум, то необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Геометрично рівність $f'(x_0) = 0$ означає, що в точці екстремуму функції $f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі *Ox*, а якщо $f'(x_0) = \infty$, то дотична паралельна осі Оу.

Зауважимо, що умова $f'(x_0) = 0$ не є достатньою умовою існування екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$ її похідна $y' = 3x^2$ дорівнює нулю при $x = 0$, але $x = 0$ не є точкою екстремуму.

Існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, неперервна функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ похідної не має, але ця точка є точкою мінімуму.

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними.*

Теорема (достатня умова існування екстремуму). Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 диференційованої в деякому околі цієї точки функції $f(x)$ її похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то x_0 – є точкою мінімуму.

Приклад. Знайти критичні точки та проміжки зростання і спадання функції: $y = x^3 - 3x$.

Розв'язання. Нагадаємо, що будь-яке дослідження функції необхідно розпочинати з находження її області визначення. Тут $D(y) = R$.

Похідна цієї функції: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ *;* $f'(x) > 0$ *при* $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$*;* $f'(x) < 0$ *при* $x \in (-1; 1)$.

При переході через точку $x_0 = -1$ похідна функції змінює знак з «+» на «-», тобто в точці $x_0 = -1$ знаходиться максимум функції. При переході через точку $x_0 = 1$ похідна функції змінює знак з «-» на «+», в точці $x_0 = 1$ знаходиться мінімум функції.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-1; 1)$. Максимум її знаходиться в точці $x_0 = -1$, мінімум - у точці $x_0 = 1$.

4.2.3 Опуклість графіка функції. Точки перегину.

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку (a, b).

Графік функції $f(x)$ називається *опуклим (угнутим)* на проміжку (a, b), якщо усі точки кривої $f(x)$ розташовані нижче (вище) точок дотичної, проведеної у будь-якій точці графіка на цьому проміжку.

Точку графіка функції $f(x)$, у якій змінюється напрямок опуклості, називають *точкою перегину.*

У подальшому вважаємо, що функція $f(x)$ має другу похідну на проміжку (a, b).

Теорема (достатня умова опуклості графіка функції).

Якщо друга похідна функції $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ в усіх точках проміжку (a, b), то графік функції опуклий вгору (опуклий вниз) на цьому проміжку.

Теорема (достатня умова існування точок перегину).

Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0, в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то ця точка є точкою перегину.

Приклад. Дослідити функцію $y = x^5 - 2x + 5$ на опуклість і знайти точки перегину.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = R$. Знайдемо першу і другу похідні даної функції: $y' = 5x^4 - 2, y'' = 20x^3$. Друга похідна дорівнює нулю $y' = 0$ при $x = 0$. Тому $y' > 0$ при $x > 0$; $y' < 0$ при $x < 0$.

Отже, графік функції функцію $y = x^5 - 2x + 5$ є опуклим на проміжку $(-\infty; 0)$ і угнутим на проміжку $(0; \infty)$. Точка (0; 5) є точкою перегину.

4.2.4 Асимптоти графіка функції

Асимптоти дозволяють створити уявлення про поведінку графіка функції при віддалені його точок на нескінченність.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує нуля, якщо ця точка рухається вздовж графіка функції до нескінченності.

Асимптоти поділяють на два види: вертикальні й похилі (зокрема, горизонтальні).

Пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$**,** якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \qquad \text{або} \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty, \qquad \text{або} \lim_{x \to a+0} f(x) = \infty.$$

Рівняння *похилої асимптоти* будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b,$$

де $k = lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx)$.

Таким чином, якщо існує похила асимптота $y = kx + b$, то k і b знаходять за отриманими формулами. І навпаки: якщо існують скінченні границі в формулах для k і b, то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою.

Зокрема, якщо $k = 0$, то $b = \lim_{x \to \infty} f(x)$. Тому $y = b$ – рівняння *горизонтальної асимптоти*.

<u>Зауваження</u>. Асимптоти графіка функції можуть бути різними при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$.

Якщо хоча б одна з границь при знаходженні k і b не існує або дорівнює нескінченності, то похилих асимптот немає.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функцій $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Область визначення $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Шукаємо вертикальні асимптоти графіка функції :

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0} = -\infty\,; \qquad \lim_{x\to1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty\,;$$

звідси $x = -1$ і $x = 1$ є вертикальними асимптотами.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 1\,,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

Підставляючи $k = 1$ і $b = 0$ в рівняння $y = kx + b$, отримаємо: $y = x$, це шукана похила асимптота.

4.2.5 Повна схема дослідження функції

При дослідженні графіка функції в цілому, рекомендується, наприклад, загальна схема, за якою слід:

1) знайти область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;
2) дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
3) знайти точки перетину графіка фунції з осями координат;
4) знайти інтервали монотонності та екстремуми функції;
5) знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину функції;

6) знайти асимптоти графіка функції;

7) побудувати ескіз графіка функції.

Порядок дослідження доцільно обирати згідно з особливостями даної функції.

Приклад . Дослідити функцію $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ та побудувати ескіз її графіка.

1. Область визначення: $x \neq \pm 1;$ тобто $D(y) =$ $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Прямі $x = \pm\ 1$ служать вертикальними асимптотами, тому що

$$\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty \quad и \quad \lim_{x\to 1\pm 0}\frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

2. Обчислимо $y(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = y(x)$, тобто виконується рівність $y(-x) = y(x)$, отже, функція парна і її графік симетричний відносно осі Oy.

3. Точка перетину з віссю Oy: $x=0$; $y(0) = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$. Маємо точку А(0;1).

Точок перетину з віссю Ox нема. При $y=0$, рівняння $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$ не має рішень.

4. Інтервали монотонності та екстремуми.

Знайдемо $y'(x)$: $y' = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2};$

$y'(x) = 0$, якщо $x = 0$ та $y'(x)$ не існує, якщо $x = \pm\ 1$, тобто критичною є тільки точка $x = 0$, оскільки точки $x = \pm\ 1$ не належать області визначення функції.

Поведінку функції на інтервалах монотонності згідно знаку похідної показано на рисунку 5.

Знак y':

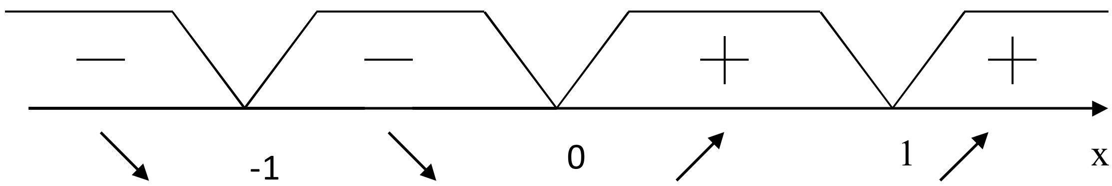


Рисунок 5

На інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(-1;0)$ функція спадає, оскільки тут $y'(x)<0$.

На інтервалах $(0;1)$ та $(1;+\infty)$ функція зростає, оскільки тут $y'(x)>0$. Зміна знака похідної при переході через точку $x=0$ $(y(0)=1)$, вказує на те, що точка $B(0;1)$ – екстремальна. Це точка мінімуму функції.

5. Інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції.

Знайдемо другу похідну даної функції:

$$y''(x)=\left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{4(1-x^2)^2-4x\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

$y''\neq 0$

Знак другої похідної і характер графіка функції на відповідних інтервалах приведені на рисунку 6

Знак y'':

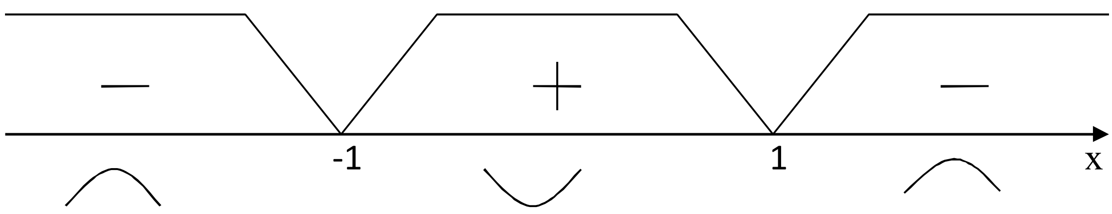


Рисунок 6

На інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$ графік функції опуклий, тому що тут $y''(x)<0$. На інтервалі $(-1,1)$ графік функції угнутий, тому що тут $y''(x)>0$. Точок перегину немає.

6. Знайдемо вертикальні асимптоти:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\frac{2}{0}=\infty\,; \qquad \lim_{x\to 1}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\frac{1}{0}=\infty\,.$$

Отже $x=-1$ та $x=1$ – вертикальні асимптоти.

Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням

$$y=kx+b$$

Знайдемо параметри k та b:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{x(1-x^2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1-3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{-6x}=0$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{-2x}=-1$$

Таким чином, отримали горизонтальну асимптоту: $y=-1$.

7. Побудуємо ескіз графіка функції, використовуючи отриману вище інформацію (рис. 7):

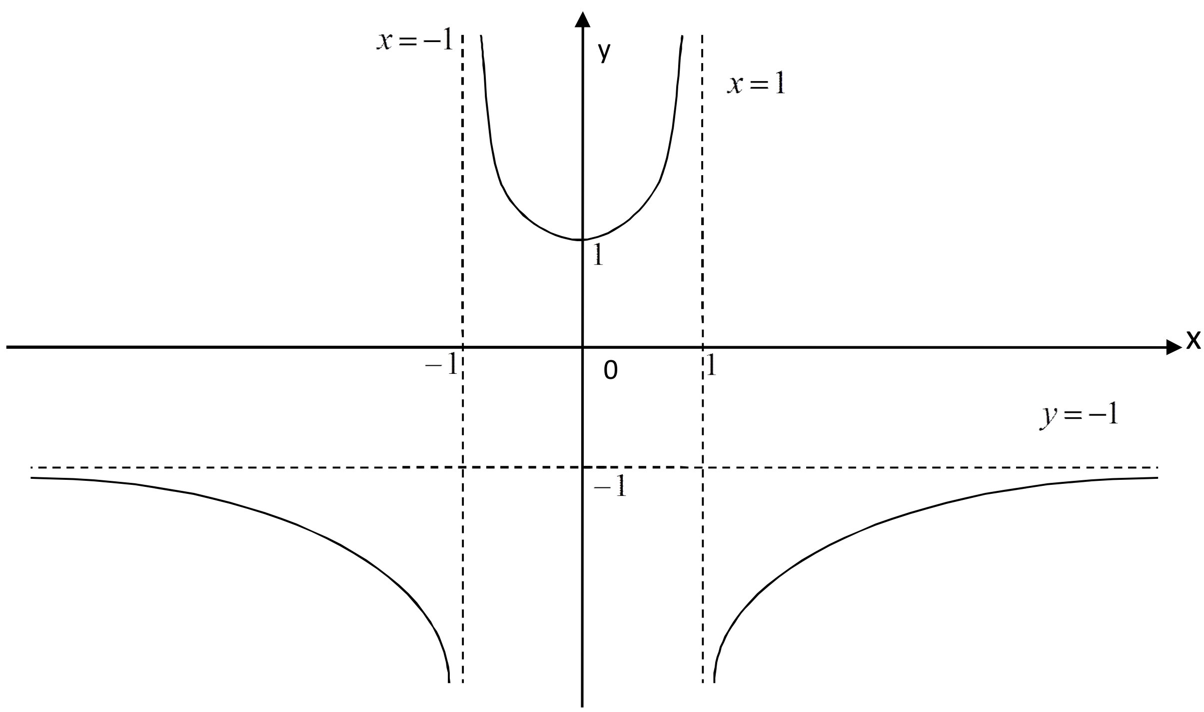


Рисунок 7

Задачі для самоперевірки

Дослідити функцію та побудувати ескіз її графіка:

а) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$, б) $\frac{x^2-1}{x+2}$, в) $\frac{x^2+2x-1}{2x+1}$.

Список рекомендованих джерел

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.

2. Валєєв К. Г., Вища математика : у 2 ч. Ч.1. – Київ : КНЕУ, 2001. – 546 с.; Ч.2. – К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2002. – 451 с.

3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003 – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. Кн.2. Спеціальні розділи. – 368 с.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – М.: Наука, 1985.

5. Станішевський С.О. Вища математика : навч. посібник. / С. О. Станішевський; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.

6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М. : Наука, 1985. – 383 с.

8. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

9.. Методичні вказівки до вирішення задач з віщої математики (для студентів 1 курсу усіх спеціальностей). Частина 1 / Харків. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад. : Л.П. Вороновська, С.С. Шульгіна, Є.С.Пахомова. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 84 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки

для практичних занять

з навчальної дисципліни

«**ВИЩА МАТЕМАТИКА**»

Частина 1

(для студентів 1 курсу денної форми навчання
спеціальності 192 –Будівництво та цивільна інженерія)

Укладачі: **ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна

ШУЛЬГІНА Світлана Сергіївна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *С. С. Шульгіна*

План 2015, поз. 128М

Підп. до друку 31.05.2017	Формат 60х84/16
Друк на ризографі	Ум. друк. арк. 1,5
Зам. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О.М. Бекетова
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017